

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ельвіра Лузік

**ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
В ПСИХОЛОГІЇ**

Навчальний посібник

Київ - 2022

Передмова

Близько 500 років назад видатний італійський художник (живописець, скульптор, архітектор) і вчений (анатом, математик, фізик, натураліст) Леонардо да Вінчі, один з найвизначніших представників мистецтва Високого Відродження, яскравий приклад «універсальної людини» (лат. homo universalis) – ідеалу італійського Ренесансу відзначив, що ніякої достовірності немає в науках там, де не можна прикласти жодної з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою. Згодом, більш ніж 200 років потому великий філософ І. Кант обґрунтував неспроможність психології як науки застосувати математичні методи, виходячи з того, що психічні явища не піддаються виміру. Цієї думки притримувалися й інші вчені. Так, С. Стівенс у своїй капітальній праці «Експериментальна психологія» говорив, що «зрілість науки, зазвичай, вимірюється тим, в якій мірі вона використовує математику. Сама ж математика не є наукою в емпіричному розумінні, але представляє собою формально логічну, символічну систему». У той же час, із історії психології добре відомо, що, наприклад, психофізика почала свій розвиток із встановлення математичних закономірностей (наприклад, формула Вебера – Фехнера).

Зв'язок психології з математикою в останні роки стає все більш тісним і багатоплановим. Тепер математичні процедури обов'язково входять в такі розділи психології як психометрика, психодіагностика, диференціальна психологія, психогенетика тощо. Традиційним стало використання математичних методів під час аналізу і обробки даних наукового експерименту. І хоча ряд фундаментальних психологічних теорій, наприклад, теорія діяльності А. Леонтьєва, теорія розвиваючого навчання В. Давидова, психоаналіз Фрейда, трансактний аналіз Берна, були створені без усякої опори на математику, головна відміна цих галузей знань, що використовують математичні методи, полягає в тому, як їх предмет дослідження не тільки може бути описаним, але й вимірним. При цьому найбільш важливими в будь-якому експерименті повинні бути постановка задачі, ретельне планування експерименту і побудова несуперечливих гіпотез. Саме тому, все глибше у психології використовують ідеї математичної теорії планування експерименту, різноманітні математичні методи. Так, саме в такому ракурсі, розглядається питання про можливість формалізації процесів та явищ.

Найбільш природним шляхом, яким математика проникає у психологію, є математична статистика, яка дозволяє науковцю:

- доводити правильність і обґрунтованість методичних прийомів і методів, які використовуються;
- строго обґрунтовувати експериментальні плани;
- узагальнювати дані експерименту;
- знаходити залежності між експериментальними даними; виявляти наявність суттєвих різниць між групами досліджених;
- будувати статистичні припущення.

Все це, природно, привело до необхідності розробки спільних питань методології і теорії, а застосування математики в психології стало основою навчальної дисципліни "Основи математичного моделювання в психології".

Досвід свідчить, що впровадження математики в ці науки – дуже серйозна справа, яка вимагає вирішення низки наступних проблем:

- визначення можливостей і меж математизації;
- виявлення математичного змісту як системи методів наукового пізнання психологічних процесів і явищ засобами математики;
- розробка принципів вибору і оцінки адекватності математичних методів для розв'язання різноманітних наукових задач;
- визначення можливостей і шляхів створення спеціального математичного апарату психології для вивчення процесів відображення зовнішнього світу;
- визначення принципів і методів моделювання процесів діяльності людини, ергатичних систем.

Використання математики в гуманітарних науках дозволяє стверджувати, що в основу формалізованого опису процесів і явищ слід покласти системний підхід, згідно з яким кожна математична модель повинна, з одного боку, вписуватися в цілісну систему опису суспільства та суспільних відносин, людської психіки, а, з іншого, – слугувати каркасом для наступної деталізації математичного опису. Це дозволить отримувати нову інформацію про ці явища і процеси, тобто математичні моделі здобудуть суттєву прогностичну цінність.

ЗМІСТ

Передмова	4
Вступ	6
Модуль 1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДИК ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ ПСИХОЛОГІЧНИХ ДАНИХ	
7	
Питання 1. Основні поняття математичної обробки психологічних даних	8
1.1. Ознаки та змінні	8
1.2. Шкали виміру	9
1.3. Розподіл ознак та параметри розподілу ознак	16
1.4. Статистичні гіпотези. Критерії оцінки гіпотез	27
1.5. Рівні статистичної значущості. Потужність критерію	30
Питання 2. Класифікація задач практичної психології і методів їх вирішення ..	32
Питання 3. Умови оптимізації вибору методів математичної обробки емпіричних даних	33
Тезаурус вихідних знань модуля I	34
Питання для самопідготовки	38
Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	39
Вихідний контроль знань	40
Модуль 2. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ОРІЄНТОВАНІ СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ОЗНАК	
42	
Розділ I. Непараметричні критерії розбіжностей ознак для незв'язаних вибірок	42
Вхідний контроль знань	43
Питання 1. Виявлення розбіжностей на рівні дослідженої ознаки. Особливості використання непараметричних критеріїв розбіжностей ознак.....	45
Питання 2. Q – критерій Розенбаума	47
Питання 3. U – критерій Манна-Уїтні	50
Питання 4. H – критерій Крускала-Уолліса. Особливості критерію H	54
Питання 5. S – критерій тенденцій Джонкіра	58
Питання 6. Алгоритм прийняття рішення про вибір непараметричних критеріїв оцінки достовірності розбіжностей між незалежними вбірками по рівню ознаки	63
Питання 7. Практична реалізація критеріїв розбіжностей ознак	64
7.1. Q – критерій Розенбаума	64
7.2. U – критерій Манна-Уїтні	70
7.3. H – критерій Крускала-Уолліса	76
7.4. S – критерій тенденцій Джонкіра	81
Тезаурус вихідних знань	87
Питання для самопідготовки	91
Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	91
Вихідний контроль знань	93

Розділ II. Критерії оцінки достовірності зсувів в значеннях досліджуваної ознаки або критерії змін	95
Вхідний контроль знань.....	96
Питання 1. Класифікація зсувів та критерії оцінки їх статистичної достовірності	98
Питання 2. G – критерій знаків. Гіпотези критерію знаків або критерію Мак–Немара	101
Питання 3. T – критерій Вілкоксона. Призначення критерію та його особливості	106
Питання 4. Критерій χ^2 -Фрідмана	110
Питання 5. L – критерій тенденцій Пейджа	115
Питання 6. Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію оцінки змін (зсуву)	119
Питання 7. Практична реалізація критеріїв змін	120
7.1. G – критерій знаків	120
7.2. T – критерій Вілкоксона	125
7.3 Критерій χ^2 – Фрідмана	131
7.4 L – критерій тенденцій Пейджа	136
Тезаурус вихідних знань	140
Питання для самопідготовки	143
Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	144
Вихідний контроль знань	146
Розділ III. Критерії погодження розподілу. Вияв розбіжностей у розподілі ознаки	148
Вхідний контроль знань	149
Питання 1. Вияв розбіжностей у розподілі ознаки. Особливості використання критеріїв згоди або розходження розподілу ознаки	151
Питання 2. χ^2 – критерій Пірсона	154
Питання 3. λ – критерій Колмогорова-Смирнова	159
Питання 4. Алгоритм вибору критерію порівняння розподілів	168
Питання 5. Практична реалізація критеріїв погодження розподілу	168
5.1. χ^2 – критерій Пірсона	168
5.2. λ – критерій Колмогорова-Смирнова	180
Питання 6. Параметричні критерії розбіжностей ознаки. t – критерій Ст'юдента	184
6.1. Критерій Ст'юдента для незв'язаних незалежних вибірок	184
6.2. Критерій t – Ст'юдента для зв'язаних вибірок	187
Питання 7. F – параметричний критерій Фішера	190
Питання 8. Практична реалізація параметричних критеріїв t – Ст'юдента і F – Фішера	193
8.1 Критерій t – Ст'юдента.....	193
8.2. Критерій F – Фішера	198
Тезаурус вихідних знань	200
Питання для самопідготовки	203
Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	204
Вихідний контроль знань	208
Розділ IV. Багатофункціональні статистичні критерії	210
Вхідний контроль знань	211
Питання 1. Призначення багатофункціональних статистичних критеріїв, їх обмеження і особливості використання	212
Питання 2. Критерій кутового перетворення ϕ^* – Фішера. Сутність критерію	214

Питання 3.	Біноміальний критерій – m	220
Питання 4.	Багатофункціональні критерії як ефективні замітники традиційних критеріїв	225
Питання 5.	Алгоритм вибору багатофункціональних критеріїв	225
Питання 6.	Практична реалізація багатофункціональних статистичних критеріїв	226
	6.1. ϕ^* – критерій Фішера	226
	6.2. Біноміальний критерій m	228
	Тезаурус вихідних знань	230
	Питання для самопідготовки	231
	Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	232
	Вихідний контроль знань	233
	 Розділ V. Метод рангової кореляції Спірмена	235
	Вхідний контроль знань	236
Питання 1.	Обґрунтування задачі дослідження узгоджених дій	237
Питання 2.	Класифікація кореляційних зв'язків	240
Питання 3.	Міри кореляції. Головні переваги кореляційного аналізу	243
Питання 4.	Коефіцієнт рангової кореляції r_s – Спірмена. Призначення та особливості методу	245
Питання 5.	Практична реалізація визначення коефіцієнта рангової кореляції r_s – Спірмена	257
	Тезаурус вихідних знань	261
	Питання для самопідготовки	264
	Вихідний контроль знань	264
	 Розділ VI. Дисперсійний аналіз	266
	Вхідний контроль знань	267
Питання 1.	Поняття дисперсійного аналізу і умови його використання	269
Питання 2.	Особливості і відмінності дисперсійного аналізу (ANOVA) від непараметричних методів	272
Питання 3.	Дисперсійний однофакторний аналіз. Алгоритм проведення дисперсійного аналізу	273
Питання 4.	Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язаних вибірок	279
Питання 5.	Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язаних вибірок	284
Питання 6.	Алгоритм розрахунку операцій в однофакторному дисперсійному аналізі	288
	6.1. Розрахунок основних величин для однофакторного дисперсійного аналізу	288
	6.2. Послідовність операцій в однофакторному дисперсійному аналізі для незв'язаних вибірок	288
	6.3. Послідовність операцій в однофакторній моделі дисперсійного аналізу для зв'язаних вибірок	289
Питання 7.	Практична реалізація метода однофакторного дисперсійного аналізу	290
Питання 8.	Дисперсійний двофакторний аналіз	294
	8.1. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язаних вибірок	296
	8.2. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язаних вибірок	300
	Тезаурус вихідних знань	306
	Питання для самопідготовки	308
	Портфоліо самостійного формування продуктивних умінь	308

Вихідний контроль знань	311
Розділ VII. Кластерний аналіз	
Питання 1. Основна мета та сфери використання техніки кластеризації	313
Питання 2. Методи кластеризації. Об'єднання або деревовидна кластеризація	314
Питання 3. Метод двохвідного об'єднання	319
Питання 4. Метод К – середніх	320
Питання 5. Алгоритм проведення кластерного аналізу	321
Тезаурус вихідних знань	322
Питання для самопідготовки	323
Вихідний контроль знань	323
Питання 6. Приклад використання кластерного аналізу	324
<i>Модуль 3. МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ</i>	
Вхідний контроль знань	337
Питання 1. Методи статистичного аналізу експериментальних даних	338
Питання 2. Первинна статистична обробка результатів експерименту.....	340
2.1. Складання таблиць	341
2.2. Перетворення форми інформації	343
2.3. Перевірка даних	343
Питання 3. Методи первинної статистичної обробки результатів експерименту	344
3.1. Аналіз первинних статистик	344
3.2. Оцінка достовірності розбіжностей	349
3.3. Нормування даних	350
Питання 4. Методи вторинної статистичної обробки результатів експерименту	351
4.1. Регресивне обчислення	351
4.2. Методи порівняння двох елементарних статистик (середніх, дисперсій)	352
4.3. Методи кореляції між змінними	357
4.4. Методи виявлення внутрішньої статистичної структури емпіричних даних	361
Питання 5. Опис та представлення результатів дослідження.....	364
5.1. Наочне представлення результатів	364
5.2. Опис та інтерпретація результатів.....	365
Тезаурус вихідних знань	366
Питання для самопідготовки	369
Вихідний контроль знань	369
Література	372
Відповіді на тестові завдання вхідного та вихідного контролю знань	373
Додаток 1: ТАБЛИЦІ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ	
Таблиця I. Критичні значення критерію Q – Розенбаума для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ і $p \leq 0,01$ (за Гублером Е.В., Генкіном А.А., 1973)	378
Таблиця II. Критичні значення критерію U – Манна-Уїтні для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ і $p \leq 0,01$ (за Гублером Е.В., Генкіном А.А., 1973)	379
Таблиця III. Критичні значення критерію H – Крускала-Уолліса для різних сполучень π_1, π_2, π_3	385

Таблиця IV.	Критичні значення критерію S – Джонкіра для кількості груп (c) від трьох до шести ($3 \leq c \leq 6$) і кількості досліджених в кожній групі від двох до десяти ($2 \leq n \leq 10$).....	386
Таблиця V.	Критичні значення критерію G для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ та $p \leq 0,01$ (за Оуеном Д.Б., 1966)	386
Таблиця VI.	Критичні значення критерію T – Вілкоксона для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ та $p \leq 0,01$	387
Таблиця VII-A	Критичні значення критерію χ^2_r – Фрідмана для кількості умов $c = 3$ та кількості досліджуваних $2 \leq n \leq 9$	388
Таблиця VII-B	Критичні значення критерію χ^2_r – Фрідмана для кількості умов $c = 4$ та кількості досліджуваних $2 \leq n \leq 4$	389
Таблиця VIII.	Критичні значення критерію тенденцій L – Пейджа для кількості умов $3 \leq c \leq 6$ та кількості досліджуваних $2 \leq n \leq 12$	390
Таблиця IX.	Критичні значення критерію χ^2 для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ і $p \leq 0,01$ при різному числі ступенів свободи v	391
Таблиця X.	Критичні значення d_{\max} , відповідні рівню статистичної значущості $p \leq 0,05$ і $p \leq 0,01$ при співставленні емпіричного розподілу з теоретичним	392
Таблиця XI.	Критерій λ – Колмогорова-Смирнова для співставлення емпіричного розподілу з теоретичним (при $n > 50$) або двох емпіричних розподілів між собою (при $n > 50$): рівні статистичної значущості різних значень $\lambda_{\text{емп}}$	392
Таблиця XII.	Величини кута φ (в радіанах) для різних процентних часток: $\varphi = 2 \cdot \arcsin \sqrt{P}$ (за Урбахом В.Ю., 1964)	393
Таблиця XIII.	Рівні статистичної значущості p значень критерію φ^* – Фішера	395
Таблиця XIV.	Критичні значення m – біноміального критерію при $p \leq 0,50$; $n \leq 50$ (за Оуеном Д.В., 1966)	395
Таблиця XV.	Критичні значення m – біноміального критерію при $p \leq 0,50$; $n \leq 50$ (за Руніоном Р., 1982)	396
Таблиця XVI.	Критичні значення вибіркового коефіцієнту кореляції рангів (за В.Ю. Урбахом, 1964)	402
Таблиця XVII	Критичні значення критерію F – Фішера для рівнів статистичної значущості $p \leq 0,05$ і $p \leq 0,01$: df_1 – число ступенів свободи у чисельнику, df_2 – число ступенів свободи у знаменнику (за Snedecor G. V., 1956)	402
Таблиця XVIII	Критичні значення t – критерію Ст'юдента при різних рівнях значущості (p) для заданого числа ступенів свободи k	408
Таблиця XIX.	Критичні значення коефіцієнту кореляції r_s Пірсона	408
Таблиця XX.	Критичні значення коефіцієнту кореляції рангів Спірмана	409
Таблиця XXI.	Значення критерію для відбракування випадаючих варіантів при різних рівнях значущості (p)	409